Jede Funktion dieser Bauart mit differenzierbaren Funktionen g und f löst unsere Gleichung.

8. $u = u(x,y)$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$$

Aus $(\nabla u, \nabla u) = 0$ folgt $\nabla u = 0$ also $u(x,y) \equiv c$.

Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen sind durch die Gleichung immer bis auf Konstanten bestimmt. Diese müssen dann durch Anfangs- oder Randbedingungen bestimmt werden. In den Beispielen 6. und 7. haben wir gesehen, dass Lösungen partieller Differentialgleichungen noch frei wählbare Funktionen beinhalten. Aber auch diese können bei geeigneten Anfangs- oder Randbedingungen ermittelt werden.

Anwendung des Gaußschen Integralsatzes:

~~1.2~~ Die Wärmeleitgleichung

Diese Gleichung beschreibt die Wärmeausbreitung in Körpern, modelliert aber auch die Diffusion von Substanzen in gegebenen Bereichen. Sie wird deshalb oft auch als *Diffusionsgleichung* bezeichnet.

Das betrachtete *Ortsgebiet* sei $\Omega \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$. Außerdem spielt die *Zeit* $t \geq 0$ noch eine Rolle. Gesucht ist

$$u = u(x,t) = u(x_1, x_2, x_3, t),$$

die Temperatur im Ortspunkt $x \in \Omega$ zur Zeit t.

Physikalische Grundlage für die Wärmeausbreitung in Ω ist das *Fouriersche Gesetz.* Wir betrachten hier die Änderung der inneren Energie $Q_2 - Q_1$. Diese Änderung ist gleich dem Wärmefluß über die Oberfläche S in dieser Zeit. Daher gilt

$$Q_2 - Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \int_S k \nabla u \cdot d\vec{S} dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_S k \frac{\partial u}{\partial \nu} dS dt.$$

Dabei ist ν die Normale auf S. Der Wärmestrom ist also proportional zum Temperaturgradienten. Diese Formel gilt für *isotrope* Körper. Das bedeutet, dass die Wärmeleitfähigkeit unabhängig von der Ortsrichtung ist. Die Größe $k = k(x)$ heißt Wärmeleitzahl.

Herleitung der Wärmeleitgleichung

Wir betrachten ein kleines Teilgebiet $D \subset \Omega$ im Zeitraum $[t_1, t_2]$. Dazu verwenden wir die Größen:

$c = c(x)$	spezifische Wärme
$\varrho = \varrho(x)$	Dichte
ν	äußere Normale an $S = \partial D$

Zunächst gilt für die innere Energie die Formel

$$Q(t) = \int_D c\varrho u(x,t)dx$$

und daher ergibt sich

$$\int_D c\varrho(u(x,t_2) - u(x,t_1))dx = \int_{t_1}^{t_2} \int_S k\frac{\partial u}{\partial \nu} dS dt.$$

Wir nehmen an, daß die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes erlaubt ist und wenden diesen auf das Vektorfeld $k\nabla u$ an

$$\int_D c\varrho(u(x,t_2) - u(x,t_1))dx = \int_{t_1}^{t_2} \int_D \text{div } (k\nabla u) dx dt.$$

Äquivalent dazu ist die Formulierung

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_D c\varrho\frac{\partial u}{\partial t}\, dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_D \text{div } (k\nabla u) dx dt,$$

woraus wir auf

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_D (c\varrho\frac{\partial u}{\partial t} - \text{div } (k\nabla u)) dx dt = 0$$

schließen. Aus der Beliebigkeit von t_1, t_2 und D folgt

$$c\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div } (k \text{grad } u) \qquad t > 0,\ x \in \Omega$$

die *Wärmeleitgleichung*. Ausgeschrieben:

$$c\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(k\frac{\partial u}{\partial x_i}).$$

Ist Ω homogen, d.h. c, ϱ, k sind von x unabhängig, dann gilt

$$\frac{c\varrho}{k}\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u. \qquad (\Delta u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}).$$

Wir transformieren $t = \frac{c\varrho}{k}t'$ und erhalten

$$\frac{\partial u}{\partial t'} = \Delta u$$

als Grundform der Wärmeleitgleichung. Bei der Diffusionsgleichung steht u für die Konzentration und k für den Diffusionskoeffizient.

6. Nachträge / Zusätze

6.1. Fejersche Summen / Weierstraß scher Approximationssatz

8.5. Gleichmäßige Approximation durch Fejérsche Summen, Weierstraßscher Approx.-satz

Wir haben bisher unter relativ starken Voraussetzungen an $f(x)$ die punktweise Konvergenz von Fourierreihen untersucht. ~~Wir~~ Es gibt Beispiele auf ganz $\mathbb{R}$ stetiger u. period. Funktionen, für welche die Fourierreihe nicht überall konvergiert (siehe z.B. Nikolski, II, § 15.5). Diesen Effekt kann man durch Summation nach Cesàro–Fejér beheben.

Anstelle der Partialsummen $S_n(x)$ betrachten wir deren arithm. Mittel:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(S_0(x) + \ldots + S_n(x)\right)$$

Def 1 Die $\sigma_n(x)$ heißen Fejérsche Summen (n-ter Ordnung).

Bemerkung: Offenbar ist jedes $\sigma_n(x)$ ein trigonometrisches Polynom!

Nun gilt nach der Integraldarst. für $S_n(x)$

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_m(t)\, f(x+t)\, dt$$

$$= \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} D_m(t)\right) f(x+t)\, dt$$

Man erhält

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} D_m(t) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\frac{\sin(2m+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\left(\sum_{m=0}^{n}\sin(2m+1)\frac{t}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$$

← siehe Fichtenholz III (nicht ausführen)

$$\Rightarrow\quad \sigma_n(x) = \frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 f(x+t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\, f(x+t)\, dt$$

mit

$$F_n(t) = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 \quad \text{Fejérscher Kern}$$

Eigenschaften des Fejérschen Kerns:

(i) $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt = 1$

Denn: Wissen bereits (Beweis Satz 2, a): Für $f(x)\equiv 1$ gilt $S_n(x)\equiv 1 \;\; \forall n \;\Rightarrow\; \sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}(1+\dots+1) = 1$. (i) folgt daraus.

$$\text{(ii)} \quad \int\limits_{\delta}^{\pi} F_n(t)\,dt = \frac{1}{2(n+1)} \int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{\overbrace{\sin(\dots)^2}^{\le 1}}{\underbrace{(\sin\frac{t}{2})^2}_{\ge (\sin\frac{\delta}{2})^2}}\,dt$$

$$\le \frac{1}{2(n+1)(\sin\frac{\delta}{2})^2}\cdot(\pi-\delta) \to 0, \quad n\to\infty$$

$(0<\delta<\frac{\pi}{2})$.

<u>Satz 1</u> Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-periodisch und stetig. Dann konvergieren die Fejérschen Summen gleichmäßig auf $[-\pi,\pi]$ gegen $f(x)$ für $n\to\infty$, d.h.

$$\sigma_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x).$$

<u>Beweis:</u>

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,f(x+t)\,dt - 1\cdot f(x)$$

$$\overset{(i)}{=} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\left\{f(x+t)-f(x)\right\}dt.$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} F_n(t)\{\dots\}\,dt + \frac{1}{\pi}\Big(\int\limits_{\delta}^{\pi} + \int\limits_{-\pi}^{-\delta}\Big).$$

Geben nun $\varepsilon>0$ vor. f ist glm. stetig auf $[-\pi,\pi]$. Damit $\exists\,\delta$:

$$|f(x+t)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{falls } |t|\le\delta$$

Wählen dieses δ. Dann

$$\Big|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} F_n(t)\{\dots\}\,dt\Big| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} F_n(t)\,dt}_{<\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\dots = 1} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{nach (i)}$$

[F_n ist positiv!]

Der zweite Teil des Integrals wird so abgeschätzt:

Sei $K = 2 \cdot \max_t |f(t)|$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\left(\int_\delta^\pi + \int_{-\pi}^{-\delta}\right) \le \frac{1}{\pi}\left(\int_\delta^\pi F_n(t)\cdot \cancel{4}K\,dt + \int_{-\pi}^{-\delta} F_n(t)\,K\,dt\right)$$

$$= \frac{\cancel{4}K}{\pi}\left(\int_\delta^\pi F_n + \int_{-\pi}^{-\delta} F_n\right) = \frac{2K}{\pi}\left(\int_\delta^\pi F_n(t)\,dt\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\uparrow$ F_n gerade Fkt

für $n > n_0$ wegen (ii)

$$\Rightarrow |\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon)$$, d.h. glm. Konvergenz

□

Wir müssen allerdings bemerken, daß hier f als 2π-periodisch und stetig vorausgesetzt ist. Damit muß $f(-\pi) = f(\pi)$ erfüllt sein.

Als wichtige Anwendung dieses Satzes erhalten wir den bekannten

Satz 2 (Weierstraßscher Approximationssatz) Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein ($n \in \mathbb{N}$ u.) Polynom

$$P(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n,$$

so daß

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b]$$

gilt.

Beweis: a) Sei $a = 0$, $b = \pi$ zunächst vorausgesetzt. Wir erweitern f zu einer 2π-period. auf $\mathbb{R}$ stetigen Fkt $\tilde{f}$,

~~$\tilde{f}$ stetig in 0 machen (evtl. O.B.d.A. $\tilde{f}(0) = 0$)~~

$$\tilde{f}(\cancel{-}x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0,\pi] \\ f(-x), & x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

$\Rightarrow \tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$, $\tilde{f}$ stetig incl. $x = 0$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben

Satz 1 $\Rightarrow$ $\exists$ trigonometrisches Polynom

$$T(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^m \left(\alpha_k \cos kx + \underbrace{\beta_k \sin kx}_{\text{kann entfallen (gerade Forts.)}}\right) = \sigma_m(x)$$

F 14

mit $\quad |\tilde{f}(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in [-\pi,\pi]$.

Jede cos- und sin-Fkt in $T(x)$ (es sind endlich viele!) kann getrennt in eine Potenzreihe auf $(-\infty,\infty)$ entwickelt werden. Auf $[-\pi,\pi] \subset (-\infty,\infty)$ konvergieren diese gleichmäßig. Deshalb,

Addition dieser Potenzreihen: ← Theorie der Potenzreihen

$$T(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell x^\ell \quad , \text{ glm. konv. auf } [-\pi,\pi]$$

glm Konv. $\Rightarrow \exists n$:

$$|T(x) - \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n} c_\ell x^\ell}_{P(x)}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \quad |\tilde{f}(x) - P(x)| \leq |\tilde{f} - T| + |T - P| < \varepsilon \quad \forall x \in [-\pi,\pi]$$

$$\Rightarrow \quad |f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [0,\pi].$$

b) Beliebiges Intervall.

Subst $\quad x = a + \frac{\tilde{x}}{\pi}(b-a)$

$$x \in [a,b] \iff \tilde{x} \in [0,\pi]$$

$$f(x) = f\left(a + \frac{\tilde{x}}{\pi}(b-a)\right) = \hat{f}(\tilde{x}).$$

Approx. von $\hat{f}(\tilde{x})$ durch $\hat{P}(\tilde{x}) = \hat{P}\big(\underbrace{x + \frac{\tilde{x}}{\pi}(b-a)}\big) =: P(x)$.

ist auch Polynom von x $\quad \square$

c) $f(0) \neq 0$. Sei $P(x)$ die beste Approximation von $\hat{f} = f(x) - f(0)$. Dann ist offenbar

$\tilde{P}(x) = f(0) + P(x)$ beste Approx. von f, denn

$$|\hat{f} - P(x)| = |f(x) - f(0) - P(x)| = |f(x) - (f(0) + P(x))|.$$

?

↑ wird nicht benötigt.